



۱- دامنه تابع  $g(x) = f(2x - 1)$  بازه  $[-1, 3]$  است. دامنه تابع  $h(x) = f(3x + 2)$  کدام است؟

(۴)  $[-\frac{5}{3}, 1]$

(۳)  $[-\frac{5}{3}, 2]$

(۷)  $[0, 8]$

(۱)  $[0, 2]$

۲- نمودار تابع  $y = f(2x - 1)$  را یک واحد به چپ منتقل کرده، سپس آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و طول نقاط روی نمودار را دو برابر می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

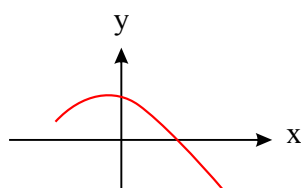
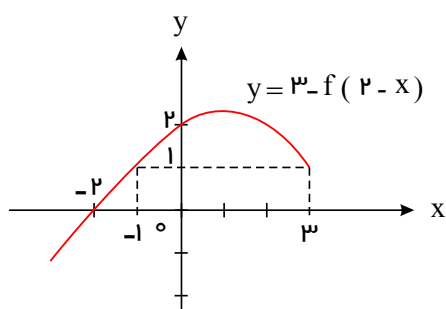
(۴)  $y = f(3 - 4x)$

(۳)  $y = f(-x)$

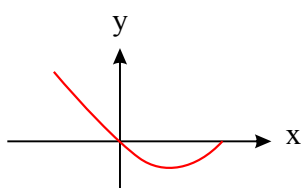
(۷)  $y = f(2 - x)$

(۱)  $y = f(1 - x)$

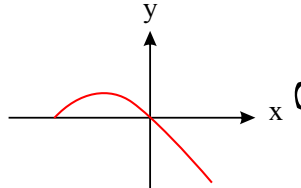
۳- با توجه به نمودار  $y = 3 - f(2 - x)$ ، نمودار تابع  $y = 2 - f(x + 3)$  کدام است؟



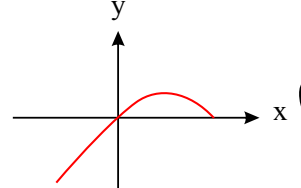
(۴)



(۳)



(۷)



(۱)

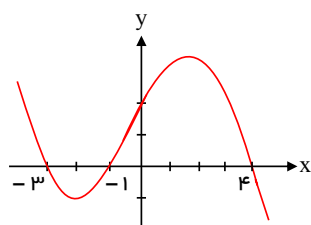
۴- در نمودار تابع  $f(x) = x^2$  به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم: انتقال ۴ واحد به طرف  $x$  های منفی - قرینه نسبت به محور  $x$  ها - دو برابر کردن برد - انتقال ۳ واحد به طرف  $y$  های منفی - معادله نمودار حاصل کدام است؟

(۴)  $y = -2x^2 + 16x - 35$

(۳)  $y = -2x^2 - 16x - 35$

(۷)  $y = 2x^2 - 16x - 29$

(۱)  $y = 2x^2 - 8x - 11$



۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = f(x - 2)$  است: دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟

(۷)  $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۱)  $[-1, 1] \cup [0, 6]$

(۴)  $[-5, -3] \cup [0, 2]$

(۳)  $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

۶- برای رسم نمودار تابع  $f(x) = \log_2(2x + 4)$ ، به ترتیب باید چه انتقال‌هایی را روی تابع  $y = \log_2(x - 1)$  انجام دهیم؟

(۷) ۳ واحد در راستای افقی به چپ، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

(۱) ۵ واحد در راستای افقی به چپ، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

(۴) ۳ واحد در راستای افقی به راست، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

(۳) ۵ واحد در راستای افقی به راست، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

۷- اگر  $f(x) = (x - 1)^2 + 1$  را نسبت به محور  $x = 0$  و سپس  $y = 0$  قرینه کنیم و ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال دهیم، ضابطه نهایی تابع کدام است؟

(۴)  $f(x) = (x - 1)^2 + 4$

(۳)  $f(x) = (x + 3)^2 + 4$

(۷)  $f(x) = -(x + 3)^2 - 4$

(۱)  $f(x) = -(x - 1)^2 - 4$



۸- نمودار تابع  $f(x) = \log(ax + b)$  با دامنه  $(-\infty, 1)$  را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم. اگر طول نقطه‌ی برخورد نمودار حاصل با نمودار  $f$ ، برابر  $-\sqrt{5}$  باشد، آنگاه  $f(-19)$  کدام است؟

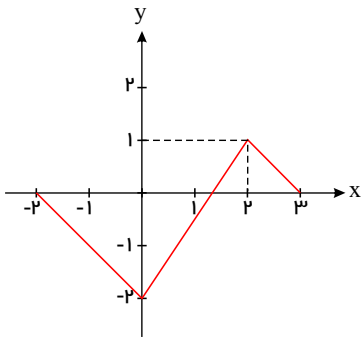
- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $-1$       ③  $1$       ④  $\log 9$

۹- تابع با ضابطه  $f(x) = 2^x$  را ابتدا نسبت به محور  $x$  و سپس نسبت به محور  $y$  قرینه کرده‌ایم. سپس آن را  $m$  واحد در راستای قائم انتقال می‌دهیم. در صورتی که ضابطه نهایی با  $f(x)$  فقط در یک نقطه تلاقی داشته باشد، فاصله نقطه تلاقی تا نقطه  $(1, 4)$  کدام است؟

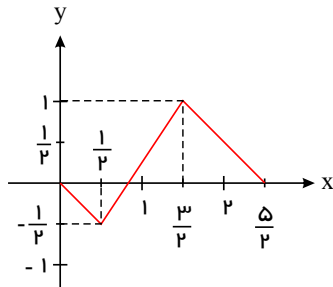
- ①  $\sqrt{8}$       ②  $3$       ③  $\sqrt{10}$       ④  $\sqrt{11}$

۱۰- نقطه  $A(-1, 3)$  روی نمودار تابع  $f(x)$  و نقطه متناظر با آن یعنی  $A'(a, b)$  روی نمودار تابع  $y = 3f(2x - 5) - 7$  قرار دارد.  $a - b$  کدام است؟

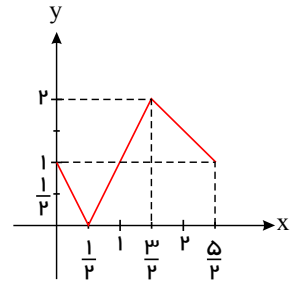
- ①  $-2$       ② صفر      ③  $2$       ④  $4$



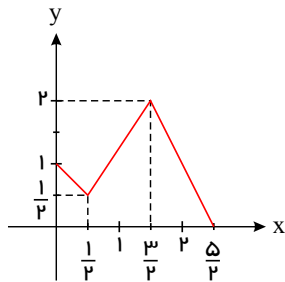
۱۱- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $y = -\frac{1}{2}f(3 - 2x) + 1$  کدام است؟



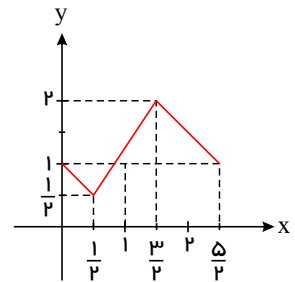
①



②

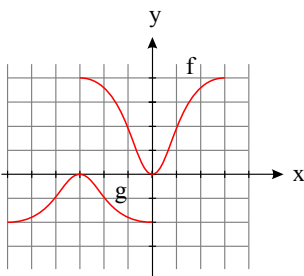


③



④

۱۲- در شکل مقابل، نمودار  $g$  از طریق تعدادی عملیات انقباض، انقباض، انتقال و قرینه روی تابع  $f$  به دست آمده است. ضابطه‌ی تابع  $g$  کدام است؟



①  $\frac{f(2-x)}{2}$

②  $\frac{-f(3-x)}{2}$

③  $\frac{f(-x-3)}{2}$

④  $\frac{-f(x+3)}{2}$



۱۳- نمودار تابع با ضابطه ی  $y = x^2 - 3x - 1$  را، حداقل چند واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور  $x$  ها غیر منفی باشد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱٫۵ (۲)

۱ (۱)

۱۴- اگر نقطه  $A(3, -2)$  متعلق به تابع  $y = f(x - 1) + 3$  باشد، نقطه متناظر آن در تابع  $y = 2f(-\frac{x}{2}) + 1$  کدام است؟

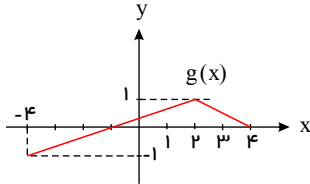
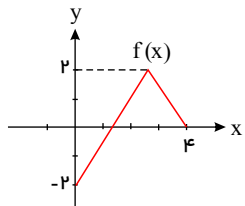
$A'(-6, -5)$  (۴)

$A'(-6, -9)$  (۳)

$A'(-4, -9)$  (۲)

$A'(-4, -5)$  (۱)

۱۵- با توجه به نمودارهای داده شده، اگر دامنه و برد دو تابع  $y_1 = \frac{1}{2}f(x + a) + 1$  و  $y_2 = g(2x) + b$  دوه دو با هم برابر باشند، حاصل  $a + b$  کدام است؟



کدام است؟

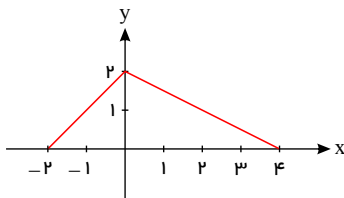
۲ (۱)

۳ (۲)

-۲ (۳)

-۳ (۴)

۱۶- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع  $y = f(x - |x|)$ ، محور  $x$  ها و خط  $x = 5$  کدام است؟



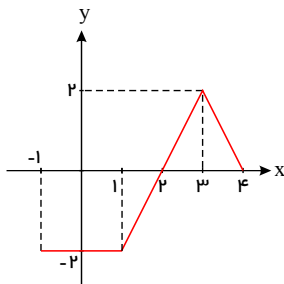
۹ (۱)

۱۱ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)

۱۷- اگر نمودار تابع  $y = f(x - 1)$  به صورت زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع  $y = \frac{1}{2}f(-2x) + 1$  کدام است؟



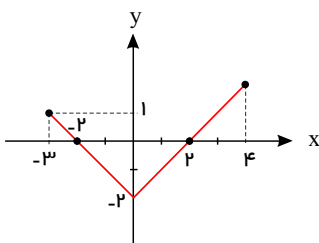
$[-1, 0]$  (۱)

$[0, 1]$  (۲)

$[-2, 0]$  (۳)

$[0, 2]$  (۴)

۱۸- اگر شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x - 2)$  باشد، آن گاه برد تابع  $y = \sqrt{|3f(x) - 1|}$  کدام است؟



$[-2, 3]$  (۲)

$[0, \sqrt{5}]$  (۱)

$[0, \sqrt{7}]$  (۴)

$[0, \sqrt{8}]$  (۳)

۱۹- فرض کنید  $f(x) = 2x^2 - x - 1$  و  $g(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$  باشد، با کدام انتقال زیر، نمودار تابع  $f \circ g(x)$  محور  $x$  ها را در دو نقطه ی متمایز با

طولهای نامنفی قطع خواهد کرد؟

۴ واحد به سمت راست و  $\frac{9}{8}$  واحد به سمت بالا (۲)

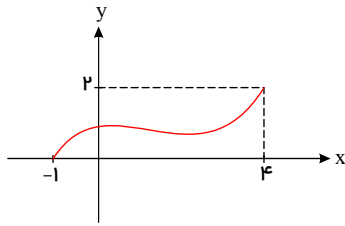
۴ واحد به سمت بالا (۱)

۱ واحد به سمت چپ (۴)

۴ واحد به سمت راست (۳)



۲۰- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل است. برد تابع  $y = 3 - f(1 - 2x)$  کدام است؟



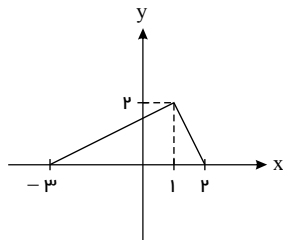
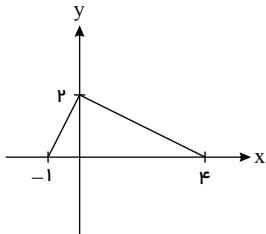
(۲)  $[1, 3]$

(۱)  $[-3, 1]$

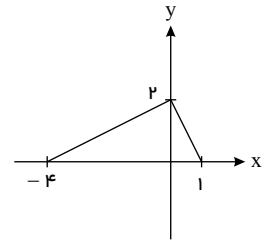
(۴)  $[-\frac{3}{2}, 1]$

(۳)  $[-7, 3]$

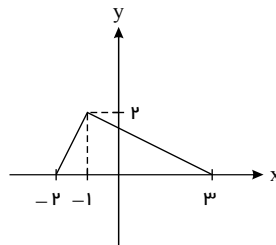
۲۱- اگر نمودار تابع  $y = f(\frac{1+x}{2})$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $y = f(\frac{1-x}{2})$  کدام است؟



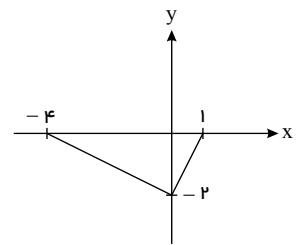
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۲۲- نقطه  $A(3, -6)$  متعلق به تابع  $y = f(x)$  است، نقطه متناظر آن در تابع  $g(x) = -2f(2x - 4) + 3$  کدام است؟

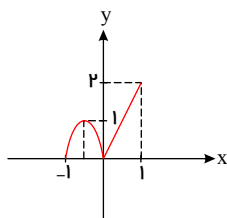
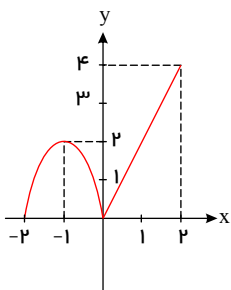
(۴)  $A'(2, -9)$

(۳)  $A'(\frac{7}{2}, -9)$

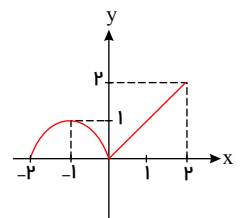
(۲)  $A'(\frac{7}{2}, 15)$

(۱)  $A'(2, 15)$

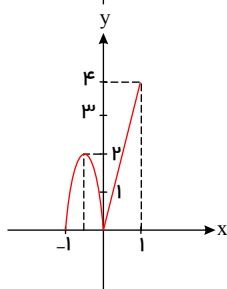
۲۳- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $y = \frac{1}{2}f(2x)$  کدام است؟



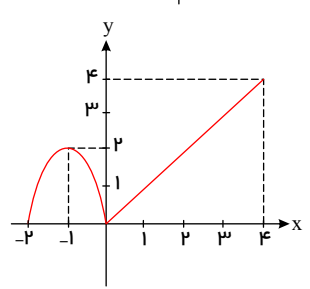
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۲۴- نمودار تابعی را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده ایم و سپس قرینه شکل حاصل را نسبت به محور  $x$  ها ۳ برابر در جهت عمودی منبسط کرده ایم و تابع  $y = -|3x - 12|$  به دست آمده است. تابع اولیه کدام بوده است؟

(۴)  $y = |x - 2|$

(۳)  $y = |x - 6|$

(۲)  $y = \frac{1}{3}|2 - x|$

(۱)  $y = 9|x - 6|$

۲۵- نمودار تابع  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$  از کدام ناحیه (نواحی) محورهای مختصات عبور نمی کند؟

(۴) از همه نواحی عبور می کند.

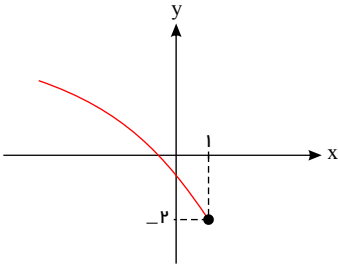
(۳) چهارم

(۲) دوم و چهارم

(۱) دوم

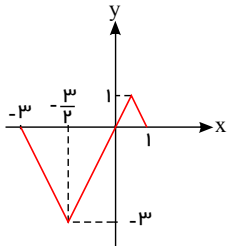


۲۶- نمودار تابع  $y = a + \sqrt{b-x}$  مطابق شکل زیر است. مقدار  $f(-8)$  کدام است؟



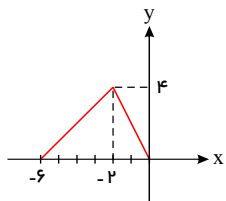
- ① ۰  
② ۱  
③ ۲  
④ ۳

۲۷- با توجه نمودار تابع  $f$ ، در مورد جواب‌های معادله  $f(x-1) + x^2 = 1$  چه می‌توان گفت؟



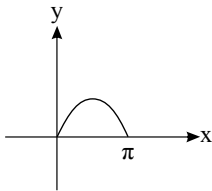
- ① دو ریشه دارد که حاصل ضربشان صفر است.  
② دو ریشه منفی دارد.  
③ دو ریشه مثبت دارد.  
④ دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.

۲۸- اگر نمودار تابع  $y = f(2x+5)$  به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع  $y = 3f(-4x+1)$  و محور  $x$ ها کدام است؟

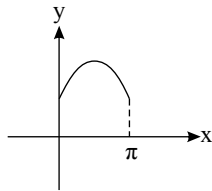


- ① ۱۰  
② ۱۲  
③ ۱۸  
④ ۲۴

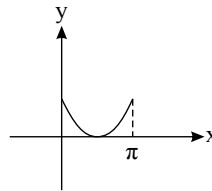
۲۹- نمودار تابع  $y = -\cos(\frac{3\pi}{4} + x) + 2$  در فاصله  $[0, \pi]$  شبیه به کدام گزینه است؟



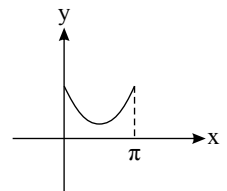
④



③

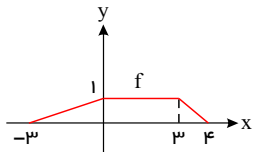


②



①

۳۰- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت شکل زیر و  $g(x) = \begin{cases} f(x+1) & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases}$  باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع  $g$  و محور  $x$ ها کدام است؟

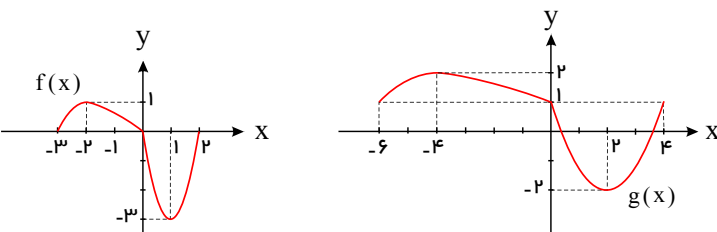


- ①  $\frac{7}{4}$   
②  $\frac{11}{4}$   
③  $\frac{13}{4}$   
④  $\frac{15}{4}$

۳۱- اگر دامنه تابع  $y = f(2x-1) + 3$  به صورت  $[-2, 6]$  باشد، آنگاه دامنه تابع  $g(x) = 3f(4x-2) - 3$  کدام است؟

- ①  $[-1, 3]$   
②  $[-\frac{3}{4}, \frac{13}{4}]$   
③  $[\frac{3}{8}, \frac{11}{8}]$   
④  $[-3, 1]$

۳۲- با توجه به نمودار دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  کدام رابطه صحیح است؟



- ①  $g(x) = f\left(\frac{x+2}{2}\right)$   
②  $g(x) = f(2x) + 1$   
③  $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$   
④  $g(x) = f(x+2) + 2$



۳۳- اگر دامنه تعریف تابع  $y = f(2 - x)$  بازه  $[-1, 2]$  باشد، دامنه تعریف تابع  $g(x) = f(3x + 4)$  کدام است؟

- ①  $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$       ②  $[0, 1]$       ③  $[0, 3]$       ④  $[1, 2]$

۳۴- نمودار تابع  $y = \sqrt{1 - 2x}$  را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار جدید خط  $y = x + 9$  را در نقطه  $A(\alpha, \beta)$  قطع می‌کند. حاصل  $\alpha + \beta$  چقدر است؟

- ①  $-20$       ②  $9$       ③  $-1$       ④  $3$

۳۵- نمودار تابع  $y = 2|x + 1| + 3$  را ابتدا یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم؛ سپس آن را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم و در نهایت ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. مجموع طول و عرض نقاط تلاقی نمودار به دست آمده با محورهای مختصات چقدر می‌باشد؟

- ①  $1$       ②  $4$       ③  $7$       ④  $-4$



## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$g(x) = f(2x - 1) \xrightarrow[\text{طول ها دو برابر}]{x \rightarrow \frac{1}{2}x} g_1(x) = f(x - 1) \xrightarrow[\text{سه واحد چپ}]{x \rightarrow x+3} g_2(x) = f(x + 2) \xrightarrow[\text{طول ها } \frac{1}{3} \text{ برابر}]{x \rightarrow 3x} h(x) = f(3x + 2)$$

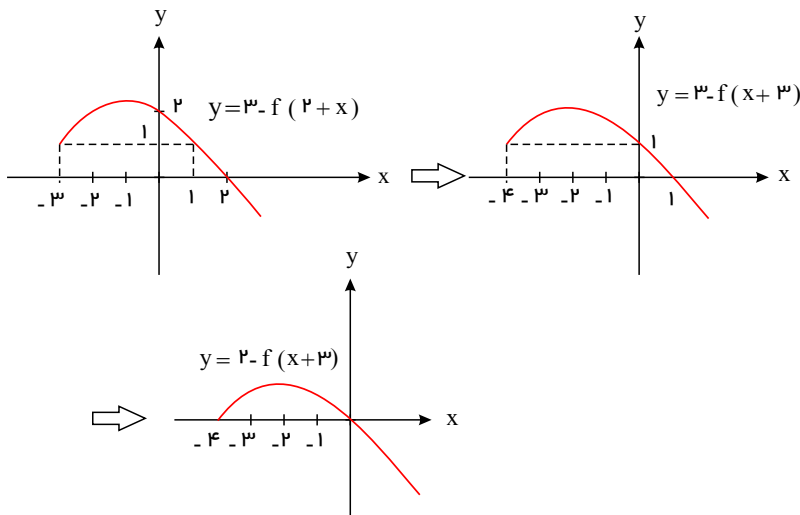
$$-1 \leq x \leq 3 \xrightarrow[\text{طول ها دو برابر}]{\text{پس}} -2 \leq x \leq 6 \xrightarrow[\text{سه واحد چپ}]{\text{پس}} -5 \leq x \leq 3 \xrightarrow[\text{طول ها } \frac{1}{3} \text{ برابر}]{\text{پس}} -\frac{5}{3} \leq x \leq 1$$

۲ - گزینه ۱ اگر نمودار تابع  $y = f(2x - 1)$  را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع  $y = f(2(x + 1) - 1) = f(2x + 1)$  به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع  $y = f(-2x + 1)$  به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم یعنی به جای  $x$  جمله  $\frac{1}{2}x$  قرار می‌دهیم. نمودار تابع  $y = f(-x + 1)$  به دست می‌آید.

۳ - گزینه ۲

$$y = 3 - f(2 - x) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y \text{ ها}]{x \rightarrow -x} y = 3 - f(2 + x) \xrightarrow[\text{یک واحد انتقال به چپ}]{x \rightarrow x+1} y = 3 - f(2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow y = 3 - f(x + 3) \xrightarrow[\text{یک واحد انتقال به پایین}]{\text{پس}} y = 2 - f(x + 3)$$



۴ - گزینه ۳

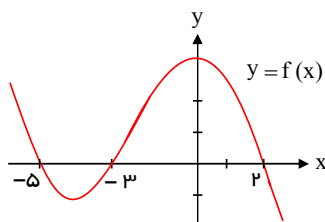
به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می‌دهیم:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow[\text{انتقال ۴ واحد به طرف } x \text{ های منفی}]{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} f_1(x) = (x + 4)^2 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}]{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{ های منفی}} f_2(x) = -(x + 4)^2$$

$$\xrightarrow[\text{دو برابر کردن برد}]{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{ های منفی}} f_3(x) = -2(x + 4)^2 \xrightarrow[\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{ های منفی}]{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y \text{ های منفی}} f_4(x) = -2(x + 4)^2 - 3$$

$$f_4(x) = -2(x^2 + 8x + 16) - 3 \rightarrow y = -2x^2 - 16x - 35$$

۵ - گزینه ۴

اگر نمودار  $f(x - 2)$  را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم نمودار تابع  $f(x)$  به دست می‌آید.



برای پیدا کردن دامنه ی تعریف  $\sqrt{xf(x)}$  باید زیر رادیکال را بزرگ تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$xf(x) \geq 0 \rightarrow xy \geq 0 \xrightarrow{x, y \text{ باید هم علامت باشند}} [-5, -3] \cup [0, 2]$$

۶ - گزینه ۲

$$f(x) = \log_2(2x + 4) = \log_2 2(x + 2) = \log_2 2 + \log_2(x + 2) = 1 + \log_2(x + 2)$$

اکنون بررسی می کنیم که نمودار  $y = \log_2(x - 1)$  را چگونه به نمودار  $y = 1 + \log_2(x + 2)$  تبدیل کنیم:

$$y = 1 + \log_2(x - 1) \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{x \rightarrow x+3} y = \log_2(x + 2)$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به سمت بالا}]{y \rightarrow y+1} y = 1 + \log_2(x + 2)$$

۷ - گزینه ۱ خط  $x = 0$  همان محور  $y$  و خط  $y = 0$  همان محور  $x$  است.

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} f(x) = (-x - 1)^2 + 1 \text{ یا } f(x) = (x + 1)^2 + 1$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x]{\text{واحد به سمت راست}} f(x) = -(x + 1)^2 - 1 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{\text{واحد به سمت راست}} f(x) = -(x - 2 + 1)^2 - 1 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{\text{واحد به سمت راست}} f(x) = -(x - 1)^2 - 4$$

$$\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}} \quad \text{۸ - گزینه ۳ می دانیم:}$$

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد.

$$ax + b > 0 \rightarrow ax > -b \rightarrow \begin{cases} a > 0 \rightarrow x > \frac{-b}{a} \\ a < 0 \rightarrow x < \frac{-b}{a} \end{cases} \xrightarrow{x < 1} \frac{-b}{a} = 1 \rightarrow b = -a$$

$$f(x) = \log(ax - a) \rightarrow f(x) = \log a(x - 1) \xrightarrow[\text{واحد به سمت چپ}]{\text{واحد به سمت چپ}} g(x) = \log a(x + 2 - 1)$$

$$= \log a(x + 1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} h(x) = -\log a(x + 1)$$

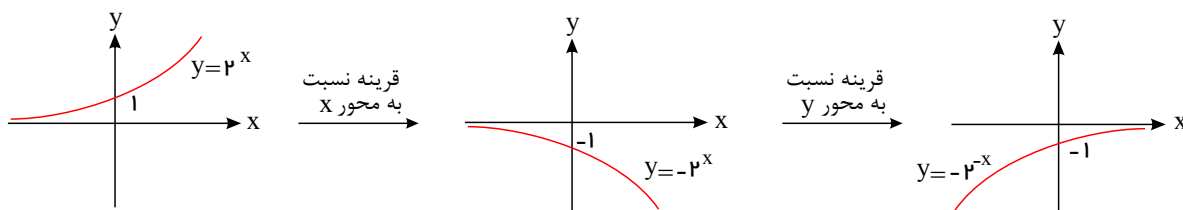
$$\log a(x - 1) = -\log a(x + 1) \rightarrow \log a(x - 1) + \log a(x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \log a^2(x + 1)(x - 1) = 0 \rightarrow \log a^2(x^2 - 1) = 0 \xrightarrow{x = \sqrt{5}} \log 4a^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\log 1 = 0} 4a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{غ ق (باتوجه به دامنه)}$$

$$\text{پس: } f(x) = \log \frac{-1}{2}(x - 1) \rightarrow f(-19) = \log \frac{-1}{2}(20) = \log 10 = 1$$

۹ - گزینه ۳



حال کافی است دو معادله  $y = 2^x$  ,  $y = -2^{-x} + m$  را برابر قرار دهیم و یک جواب داشته باشد.

$$2^x = -2^{-x} + m \Rightarrow 2^x + 2^{-x} - m = 0 \xrightarrow{2^x = A} A + \frac{1}{A} - m = 0$$

$$A^2 - mA + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} m^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \rightarrow A^2 - 2A + 1 = 0 \rightarrow A = 1 \xrightarrow{2^x = 1} x = 0, y = 1 \\ m = -2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

واضح است که  $m$  باید مثبت باشد. بنابراین نقطه تلاقی  $(1, 0)$  می باشد.

$$d = \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{10}$$

۱۰ - گزینه ۲

روشن اول:





$$A(-1, 3) \in f \Rightarrow f(-1) = 3, \quad 2x - 5 = -1 \Rightarrow x = 2$$

$$y(2) = 3f(-1) - 7 = 3 \times 3 - 7 = 2 \Rightarrow A'(2, 2) \Rightarrow a = 2, \quad b = 2 \Rightarrow a - b = 0$$

$$\text{پس: } y(2) = 3f(-1) - 7 = 3(3) - 7 = 2 \rightarrow A' \Big|_2^{a=2, b=2} \rightarrow a - b = 0$$

روش دوم: تابع  $f$  پنج واحد به سمت راست برده شده و سپس طول هایش نصف شده و عرض هایش ۳ برابر شده و نهایتاً ۷ واحد به پایین برده شده است.

$$\left| -1 \right| \xrightarrow{\text{پنج واحد راست}} \left| 4 \right| \xrightarrow{\text{طول ها نصف}} \left| 2 \right| \xrightarrow{\text{عرض ۳ برابر}} \left| 6 \right| \xrightarrow{\text{هفت واحد پایین}} \left| 9 \right| \rightarrow A' \Big|_2$$

پس  $a - b = 0$  است.

۱۱ - گزینه ۳ با توجه به مراحل زیر داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y_1 = f(x+3) \xrightarrow{x \rightarrow -x} y_2 = f(-x+3) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y_3 = f(-2x+3)$$

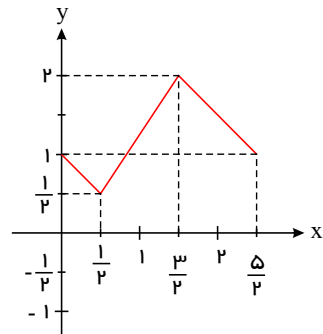
۳ واحد به چپ      قرینه نسبت به محور  $y$  ها      انقباض افقی با ضریب ۲

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y_4 = -f(-2x+3) \xrightarrow{\frac{1}{2} \text{ با ضریب}} y_5 = -\frac{1}{2}f(-2x+3)$$

انقباض عمودی با ضریب  $\frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y_6 = -\frac{1}{2}f(-2x+3) + 1$$

با انجام مراحل بالا نمودار  $y = -\frac{1}{2}f(-2x+3) + 1$  به صورت زیر است.



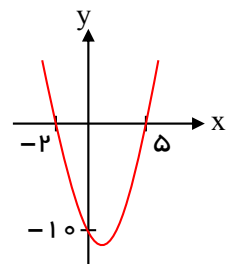
۱۲ - گزینه ۳ ابتدا در مرحله اول، نمودار  $f$  را در راستای محور  $y$  ها، با ضریب  $\frac{1}{2}$  منقبض کرده و در مرحله دوم، آن را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم. در مرحله سوم، نمودار را سه واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow{(1)} y = \frac{f(x)}{2} \xrightarrow{(2)} y = \frac{-f(x)}{2} \xrightarrow{(3)} y = \frac{-f(x+3)}{2}$$

۱۳ - گزینه ۳ کافی است تابع درجه‌ی دوم را رسم کنیم در این تابع چون ضریب  $x^2$  مثبت است تابع دارای  $Min$  است حال محل برخورد تابع با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم.

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \rightarrow x = -2, x = 5$$

$$x = 0 \rightarrow y = -10$$



واضح است اگر نمودار تابع  $f$  را حداقل دو واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال دهیم طول نقاط برخورد نمودار تابع  $f$  با محور  $x$  ها غیر منفی می‌باشد.

۱۴ - گزینه ۲ نقطه  $A(3, -2)$  متعلق به تابع  $y = f(x-1) + 3$  است یعنی  $x = 3$  و  $y = -2$  در این تابع صدق می‌کند پس:

$$-2 = f(3-1) + 3 \Rightarrow f(2) = -5 \Rightarrow (2, -5) \in f$$

اکنون باید طول نقاط را ۲ برابر کرد و سپس عرض نقاط را ۲ برابر کرد و در نهایت شکل را یک واحد به بالا منتقل نمود.

$$\left| 2 \right| \xrightarrow{\text{طول نقاط ۲ برابر}} \left| -4 \right| \xrightarrow{\text{عرض نقاط ۲ برابر}} \left| -8 \right| \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} \left| -9 \right|$$



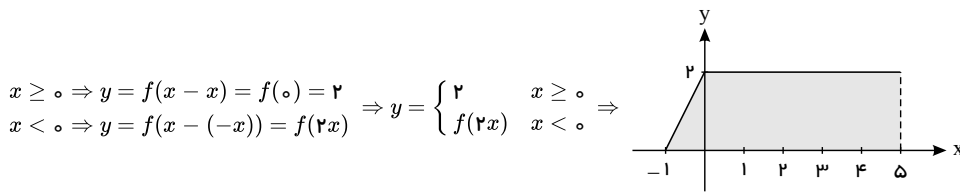
$$\begin{cases} y = f(x) \rightarrow \begin{cases} Df = [0, 4] \\ Rf = [-2, 2] \end{cases} \\ y_1 = \frac{1}{3}f(x+a) + 1 \rightarrow \begin{cases} Dy_1 = [-a, 4-a] \\ Ry_1 = [\frac{1}{3}(-2) + 1, \frac{1}{3}(2) + 1] = [0, 2] \end{cases} \\ y = g(x) \rightarrow \begin{cases} Df = [-4, 4] \\ Rf = [-1, 1] \end{cases} \\ y_2 = g(2x) + b \rightarrow \begin{cases} Dy_2 = [-2, 2] \\ Ry_2 = [-1+b, 1+b] \end{cases} \end{cases}$$

$$Dy_1 = Dy_2 \rightarrow -a = -2 \rightarrow a = 2 \text{ یا } 4 - a = 2 \rightarrow a = 2$$

$$Ry_1 = Ry_2 \rightarrow 0 = -1 + b \rightarrow b = 1 \text{ یا } 2 = 1 + b \rightarrow b = 1$$

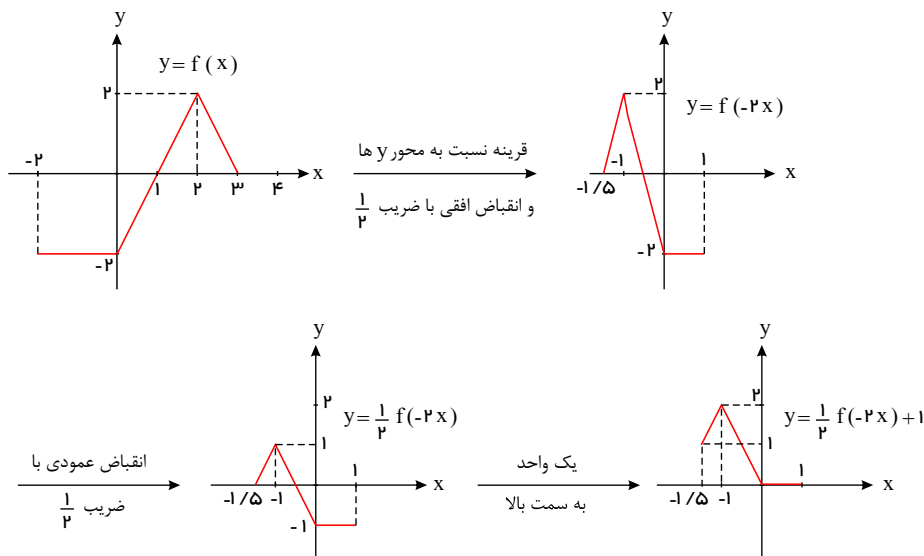
پس  $a + b = 3$  است.

۱۶ - گزینه ۲



$$S = \frac{1}{2}(\Delta + \epsilon) \times 2 = 11$$

۱۷ - گزینه ۲ ابتدا نمودار را یک سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(x)$  به دست می‌آید. سپس با انجام انتقال و انقباض، نمودار تابع  $y = \frac{1}{3}f(-2x) + 1$  را به دست می‌آوریم:



پس دامنه تابع  $y = \frac{1}{3}f(-2x) + 1$  برابر با  $[-1/5, 1]$  و برد آن  $[0, 2]$  است که اشتراک آن‌ها بازه  $[0, 1]$  می‌شود.

۱۸ - گزینه ۴ ابتدا معادله خطی را می‌نویسیم که از دو نقطه  $A \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$  و  $B \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$  می‌گذرد:

$$AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y}{x - 2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow y = x - 2 \xrightarrow{x=4} y = 2$$

برد تابع  $f(x-2)$  با تابع  $f(x)$  برابر است. بنابراین:

$$Rf(x) = [-2, 2] \Rightarrow R_{2f(x)} = [-4, 4] \Rightarrow R_{2f(x)-1} = [-5, 5]$$

$$\Rightarrow 0 \leq |3f(x) - 1| \leq 5 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{|3f(x) - 1|} \leq \sqrt{5}$$

۱۹ - گزینه ۳ ابتدا ضابطه‌ی تابع  $f \circ g(x)$  را می‌یابیم:

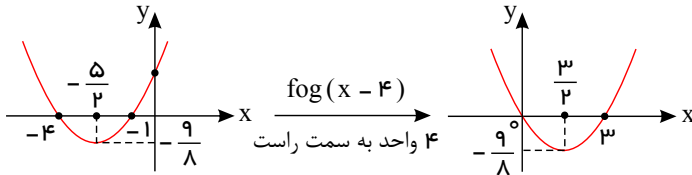


$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}(x+3)\right)^2 - \frac{1}{2}(x+3) - 1$$

$$\Rightarrow fog(x) = 2 \times \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 9) - \frac{1}{2}(x+3) - 1$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9) - \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - x - 3 - 2)$$

$$\Rightarrow fog(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 4) = \frac{1}{2}(x+1)(x+4) \xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور } x} x = -1, -4$$



مشاهده می‌کنیم که نمودار تابع  $fog$  در  $x = -1$  و  $x = -4$  محور  $x$  ها را قطع کرده است، پس اگر نمودار تابع را ۴ واحد به سمت راست منتقل کنیم، هر دو ریشه، نامنفی می‌شوند.

۲۰ - گزینه ۲ برد تابع  $y = f(x)$  به صورت  $R_f = [0, 2]$  است. بنابراین برد تابع  $f(1-2x)$  نیز  $[0, 2]$  است. حال باید  $y = 3 - f(1-2x)$  را تشکیل دهیم. برای این منظور عرض‌ها را قرینه کرده و سپس شکل را سه واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

$$R_f = [0, 2] \xrightarrow{\text{عرض‌ها قرینه}} [-2, 0] \xrightarrow{\text{سه واحد بالا}} [1, 3]$$

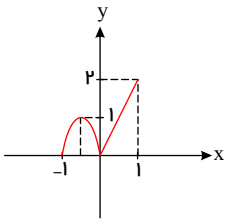
۲۱ - گزینه ۱ برای این که از تابع  $y = f\left(\frac{1+x}{2}\right)$  به تابع  $y = f\left(\frac{1-x}{2}\right)$  برسیم، کافی است که به جای  $x$  قرار دهیم  $(-x)$ . این کار یعنی این که نمودار را نسبت به محور  $y$  ها قرینه کنیم.

۲۲ - گزینه ۲

تابع  $f(x)$  چهار واحد به راست برده شده، سپس طول نقاطش نصف شده است و سپس عرض‌ها ۲ برابر شده است و در نهایت شکل سه واحد به بالا برده شده است.

$$A \begin{vmatrix} 3 \\ -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{چهار واحد راست}} \begin{vmatrix} 7 \\ -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{طول نصف}} \begin{vmatrix} 7/2 \\ -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{عرض ۲ برابر}} \begin{vmatrix} 7/2 \\ -12 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سه واحد بالا}} \begin{vmatrix} 7/2 \\ 12 \end{vmatrix}$$

۲۳ - گزینه ۲ برای رسم  $y = \frac{1}{3}f(2x)$  باید در تابع  $y = f(x)$ ، طول نقاط را بر ۲ تقسیم کرده و عرض آن‌ها را در  $\frac{1}{3}$  ضرب کنیم (یعنی عرض نقاط را هم بر ۲ تقسیم کنیم).



۲۴ - گزینه ۴ باید مراحل گفته شده را به صورت برعکس از انتها به ابتدا انجام دهیم، که داریم:

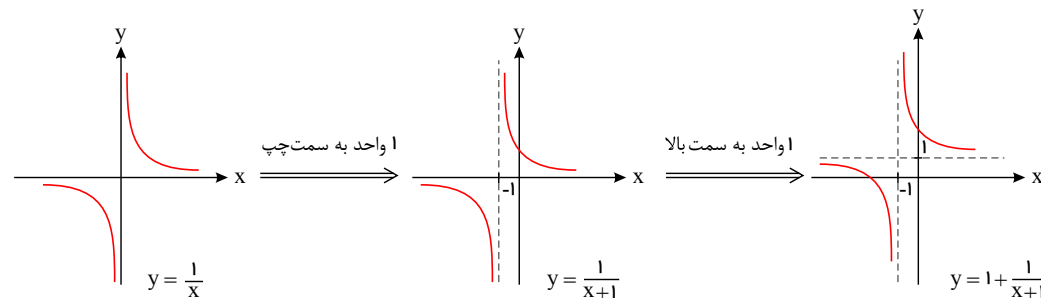
$$y = -|3x - 12| = -3|x - 4| \xrightarrow{\text{انقباض در راستای عمودی با ضریب 1/3}} y = \frac{1}{3} \times (-3)|x - 4| = -|x - 4|$$

$$\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = |x - 4| \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{واحد انتقال به چپ}} y = |x + 2 - 4| = |x - 2|$$

۲۵ - گزینه ۳

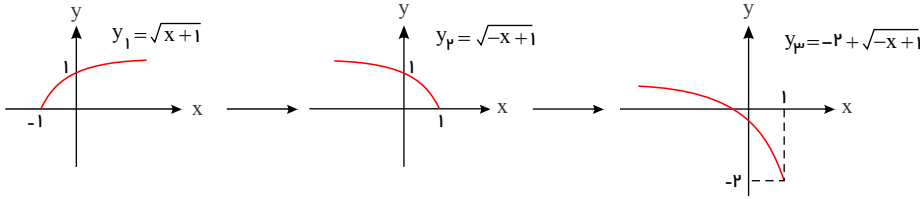
$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$$

اکنون نمودار  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$  را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت چپ و پس از آن یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



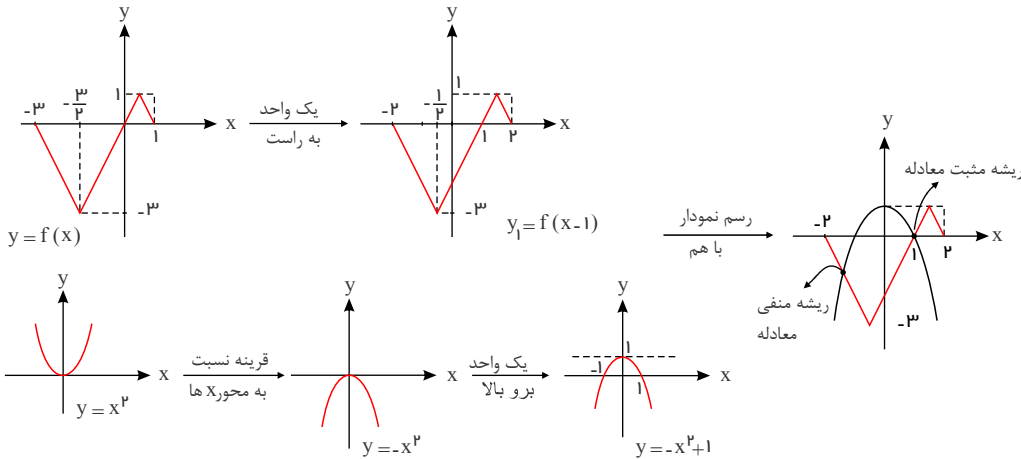


۲۶ - گزینه ۲ از انتقال تابع  $y = \sqrt{x}$  کمک می گیریم.



پس:  $f(x) = -2 + \sqrt{-x+1} \rightarrow f(-8) = -2 + \sqrt{9} = -2 + 3 = 1$

۲۷ - گزینه ۴ با توجه به مفهوم انتقال نمودارها، اگر معادله را به فرم  $f(x-1) = -x^2 + 1$  بنویسیم به راحتی می توانیم در مورد ریشه های این معادله با توجه به رسم نمودارهای  $y_1 = f(x-1)$  و  $y_2 = -x^2 + 1$  در یک دستگاه مشترک و توجه به نقاط برخورد دو نمودار قضاوت کرد:



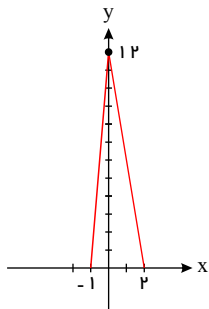
یعنی معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

۲۸ - گزینه ۳ اول مشخص می کنیم که چگونه  $y = f(2x+5)$  به  $y = 3f(-4x+1)$  تبدیل شده است.

$$y = f(2x+5) \xrightarrow[\text{عرض ها ۳ برابر}]{\text{طول ها دو برابر}} y_1 = f(x+5) \xrightarrow[\text{واحد راست}]{x \rightarrow x-4} y_2 = f(x+1) \xrightarrow[\text{طول ها } -\frac{1}{4} \text{ برابر}]{x \rightarrow -4x+1} y_3 = f(-4x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{عرض ها ۳ برابر}} y = 3f(-4x+1)$$

پس نمودار  $y = 3f(-4x+1)$  بدین صورت می شود:



$$\rightarrow S = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18$$

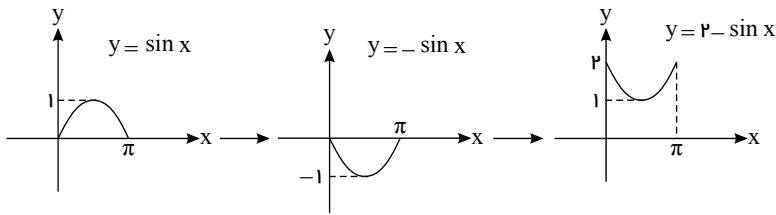
البته می توان نقاط متناظر  $\left| \frac{-2}{4} \right|$  و  $\left| \frac{-6}{4} \right|$  از تابع  $y = f(2x+5)$  را روی تابع  $y = 3f(-4x+1)$  بیابیم.

$$\begin{aligned} \left| \frac{-2}{4} \right| & \xrightarrow{y=f(2x+5)} f(5) = 0 \xrightarrow{y=3f(-4x+1)} y = 3f(5) = 3(0) = 0 \rightarrow \left| \frac{-1}{4} \right| \\ \left| \frac{-2}{4} \right| & \xrightarrow{y=f(2x+5)} f(1) = 4 \xrightarrow{y=3f(-4x+1)} y = 3f(1) = 3(4) = 12 \rightarrow \left| \frac{12}{4} \right| \\ \left| \frac{-6}{4} \right| & \xrightarrow{y=f(2x+5)} f(-7) = 0 \xrightarrow{y=3f(-4x+1)} y = 3f(-7) = 3(0) = 0 \rightarrow \left| \frac{2}{4} \right| \end{aligned}$$

۲۹ - گزینه ۱

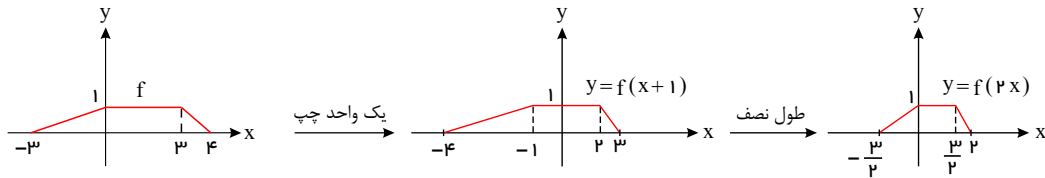
$$y = -\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2 = -\sin x + 2$$

حال به کمک انتقال نمودار  $y = \sin x$  نمودار تابع  $y = 2 - \sin x$  را در فاصله  $[0, \pi]$  رسم می کنیم.



۳۰ - گزینه ۳

برای رسم  $f(x+1)$  باید  $f(x)$  را یک واحد به چپ منتقل کنیم، همچنین برای رسم  $f(2x)$  باید طول نقاط  $f(x)$  را بر ۲ تقسیم کنیم، پس داریم:



$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \frac{(4.5 + 2) \times 1}{2} = \frac{6.5}{2} = \frac{13}{4}$$

۳۱ - گزینه ۲ ابتدا دامنه  $f(x)$  را به دست آورده و سپس از روی آن دامنه  $g(x) = 3f(4x-2) - 3$  را به دست می آوریم:

$$-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 11$$

پس دامنه  $f(x)$  به صورت  $[-5, 11]$  می باشد، برای به دست آوردن دامنه  $g$  داریم:

$$-5 \leq 4x - 2 \leq 11 \Rightarrow -3 \leq 4x \leq 13 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{4}$$

۳۲ - گزینه ۳ نمودار  $f(x)$  در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط شده و سپس یک واحد به بالا رفته است، پس داریم:

$$x \rightarrow \frac{1}{2}x \rightarrow f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

۳۳ - گزینه ۱

$$y = f(2-x) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y_1 = f(x+2) \xrightarrow[\text{واحد چپ}]{x \rightarrow x+2} y_2 = f(x+4) \xrightarrow[\text{طول ها } \frac{1}{3}]{\text{برابر}} g(x) = f(3x+4)$$

$$\text{پس: } -1 \leq x \leq 2 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} -2 \leq x \leq 1 \xrightarrow[\text{واحد چپ}]{x \rightarrow x+2} -4 \leq x \leq -1 \xrightarrow[\text{طول ها } \frac{1}{3}]{\text{برابر}} -\frac{4}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3}$$

۳۴ - گزینه ۳

$$y = \sqrt{1-2x} \xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{x \rightarrow x+1} y_1 = \sqrt{1-2(x+1)} \xrightarrow[\text{یک واحد به بالا}]{y \rightarrow y+1} y_2 = \sqrt{-2x-1} + 1$$

$$\begin{cases} y_2 = \sqrt{-2x-1} + 1 \\ y = x+9 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-2x-1} + 1 = x+9 \rightarrow \sqrt{-2x-1} = x+8$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x-1 = x^2 + 6x + 16 \rightarrow x^2 + 18x + 65 = 0 \rightarrow (x+5)(x+13) = 0$$

$$\begin{cases} x = -13 \\ x = -5 \end{cases} \xrightarrow{y=x+9} \begin{cases} y = -4 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow A \begin{cases} -5 : \alpha \\ 4 : \beta \end{cases} \rightarrow \alpha + \beta = -1$$

۳۵ - گزینه ۱ کافی است مرحله به مرحله انتقال ها را انجام دهیم:

$$y = 2|x+1| + 3 \xrightarrow[\text{یک واحد به سمت راست}]{x \rightarrow x-1} y = 2|x-1| + 1 + 3 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x]{y \rightarrow -y} y = -(2|x-1| + 4) = -2|x-1| - 4$$



۴ واحد به سمت بالا

$$\rightarrow y = -2|x| - 3 + 4 \Rightarrow y = -2|x| + 1$$

حال نقاط تلاقی با محور  $x$  ها و  $y$  ها را به دست می آوریم:

$$y = 0 \Rightarrow |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

تلاقی با محور  $x$  ها

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

تلاقی با محور  $y$  ها

$$\Rightarrow \text{مجموع طول و عرض نقاط: } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

## پاسخنامه کلیدی

|       |        |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ۱ - ۴ | ۶ - ۲  | ۱۱ - ۳ | ۱۶ - ۲ | ۲۱ - ۱ | ۲۶ - ۲ | ۳۱ - ۲ |
| ۲ - ۱ | ۷ - ۱  | ۱۲ - ۳ | ۱۷ - ۲ | ۲۲ - ۲ | ۲۷ - ۴ | ۳۲ - ۳ |
| ۳ - ۲ | ۸ - ۳  | ۱۳ - ۳ | ۱۸ - ۴ | ۲۳ - ۲ | ۲۸ - ۳ | ۳۳ - ۱ |
| ۴ - ۳ | ۹ - ۳  | ۱۴ - ۲ | ۱۹ - ۳ | ۲۴ - ۴ | ۲۹ - ۱ | ۳۴ - ۳ |
| ۵ - ۴ | ۱۰ - ۲ | ۱۵ - ۲ | ۲۰ - ۲ | ۲۵ - ۳ | ۳۰ - ۳ | ۳۵ - ۱ |